

U00001

ボールルームダンスにおける靴とフロアの摩擦モデル

Friction Model between Shoes and Floor in Ballroom Dancing

○正 塩谷 義^{*1}Tadashi SHIOYA^{*1}^{*1} 東京大学 The University of Tokyo

Friction between shoes and floor is crucially important in Ballroom dancing and in other types of dancing. Dancers feel sometimes that the floor condition is too slippery and in some other cases feel rather too sticky. In this study a simple mechanical model is presented for this friction movement and is analysed to obtain the adequate condition for the stable smooth dancing. The intended normal and tangential forces to the friction surface are matched to the smooth dancing movement and the resultant forces are derived from the mechanical model composed of the mass, spring and the friction coefficient which is a function of the relative velocity. The stability is examined with parameters in the friction analysis.

Key Words : Walking, Sliding, Landing, Tribology, Self-excited oscillation, Stability, Friction, Viscosity

1. 緒 言

ダンスをする者にとって Floor の状態はとても重要である。Dancer 間によく交わされる会話には、「あの会場は、滑るので危なくて怖い.」、「あの会場は、滑らないので、疲れる.」、「Floor が硬いから疲れる.」など Ballroom の良し悪しの良し悪しは、Floor の状態が鍵となっている。そして、うまく踊れなかった場合の責任転嫁にあたって、Floor の状態は重要な候補のひとつとなっている。水や油、石鹸など（潤滑剤）を靴底や Floor になじませると踊りやすくなる、こともダンサーの間でよく知られた事実であるが、会場管理者からお叱りを受ける重要項目のひとつにもなっている。ダンスと Floor の関係については、硬さ（剛性）、防音性、耐久性などいろいろあるが、本報においては、靴と Floor 間の摩擦に焦点を当て解析を試みる。

ボールルームダンスにおいて、Waltz, Foxtrot, Quickstep などいわゆる Swing Dance においては、Step する足は、まず、靴 (Shoe) の一部 (Heel, Toe など) が、Floor に接し (Touch, 着地)、ある程度 Floor 上を滑らせて (Slide) から静止し、この過程 (静止後を含む) で重心移動するのが一般的である。このため適度な摩擦と適度な滑りやすさが重要になってくるのである。前報までは (塩谷, 2016-2019, Shioya, 2018a, b) 主に Dancer の身体の動きの力学解析を行なったが、本報では、Floor との関係に注目した解析を行なう。

「摩擦・潤滑」の分野は力学のなかでも、理論的にはわかっていない部分が多く、長年の経験や実験観察に頼るところが大きい。また、一般的に、摩擦・潤滑の研究においては、摩擦面に関しての、垂直力、水平力、相対速度など多くが決められた条件のもとでの解析が主であるが、ダンスにおいては、摩擦面に及ぼす力や速度についても Dancer の動作により、意識的、および、無意識的に刻々と変化するので、問題はさらに複雑である。このため、Shoe と Floor 間の摩擦を理解するにはいかにモデル化するかが極めて重要である。

本報の解析においては、Shoe が Floor に着地する過程を Shoe を含む足部分 (Foot) に注目した等価質量による運動方程式を構築する。また Shoe と Floor の接触関係のダンス用語 (Footwork) を力学的見地から説明する。具体的な解析としては、まず、滑りすぎ判定の解析を行なう。次に、滑りにくさの解析を 2 段階に分けて行なう。第 1 段階は、微小線形滑り運動領域における運動の安定判別である。第 2 段階として、着地から静止までの非線形数値解析を行ない、実際に近い動負荷時の安定判別を論じる。

2. 解 析

2・1 力学解析モデルの構築

この節では、靴 (Shoe) に働く力、Footwork と Shoe—Floor の関係、運動方程式、摩擦モデル、Dancer の動作により与えられる条件を解析する。

Floor の滑りを解析するには、Dancer の動き全体の動作、運動が関係してくるが、本報の解析においては、Dancer の「あし」が脚部 (Leg) と足部 (Foot) が足首関節を介して接合しているとする Model 化を行なう。Foot 部は靴の部分に含まれ、この部分 (以下 Shoe と表示する) に働く力と運動に関する単純化した解析を行なう。Shoe 部分の等価質量を m とし、水平移動方向 (Floor 方向) を x 、垂直方向 z とし、運動は接地してからの水平方向のみを考える。Shoe に働く力としては、Dancer により制御される (べき) 水平力 $H(t)$ は進行方向への推進力を正、垂直力 $N(t)$ は下向きの圧縮力を正、また、Floor から受ける摩擦力 $F(t)$ は進行方向運動に抗する方向を正、すなわち、 $H(t)$ とは逆向きとする。運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H(t) - F(t) \quad (1)$$

となる (図1)。

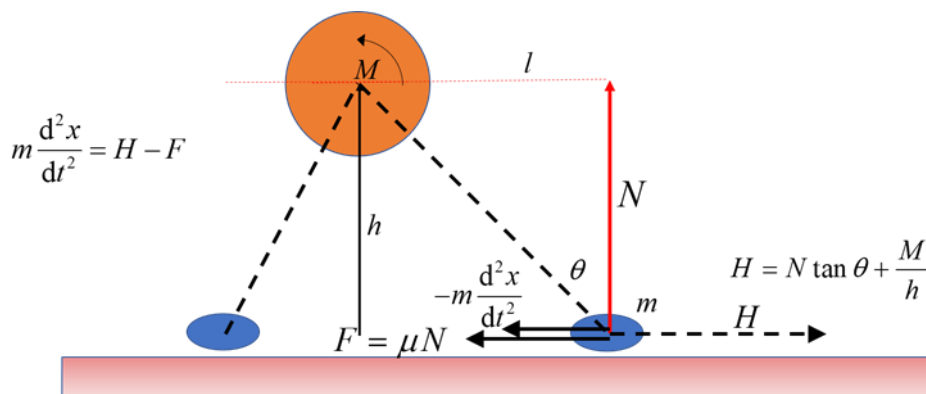


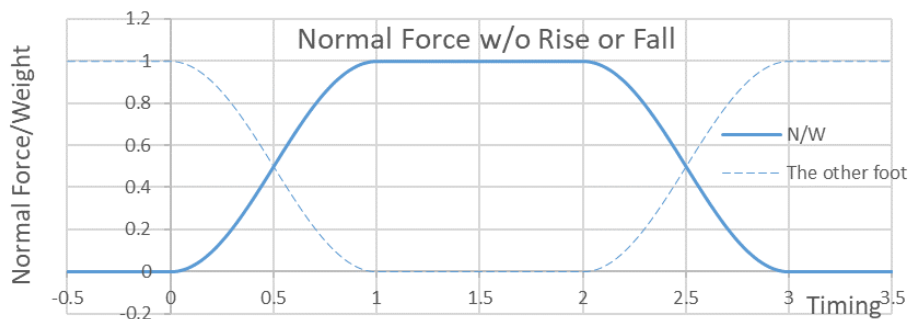
Fig.1. Single Mass Model for the Friction between Shoe and Floor

$H(t)$ および $N(t)$ は、膝、足首等の関節部のモーメントや各部の水平、垂直の運動に依存するが、それらを総合したものが足首関節に与えられるものとする。垂直力 $N(t)$ は、移動に伴う両足間の荷重分配、および、上下動の加速度による慣性力に依る。ボールルームダンスにおける重心の上下動は Syllabus において Footwork として記述されている (ISTD, 1944)。Footwork は、Step する足の靴底 (Out Sole) のどの部分が接地するかを示すものであり、Heel (H.)、Toe (T.)、Ball (B.)、Whole Foot などが用いられる。1 歩のうち接地が順番に行われる場合は、H.T. とか T.H. などと順番に記述する。ただし、通常の前進歩においては H. B. T. となるが、Rise も回転もない場合は、単に H. と記述することになっている。また、Waltz, Foxtrot, Quickstep 等の Swing Dance において T. は B. 部分も含むとしている。Tango においては、より中央側が接地するので B. の記述が主として用いられる。本報においては、Swing Dance の前進歩の代表的な Footwork、すなわち、1. H.T. 2. T. 3. T.H. 4. H. における Floor 面との間の力を考察する。具体例としては、Slow Foxtrot の基本フィギュアである Feather Step の男子の歩、すなわち 1 歩目右足 H.T.、2 歩目左足 T.、3 歩目右足 T.H.、4 歩目左足 H. に対応している。2 歩目は Up の歩、また、4 歩目の後は Three Step へ後続するとして、ともに重心の上下運動はない。Dance の進行が正常に行われるとする場合の垂直力、水平力がどのようなものであるかを解析する。

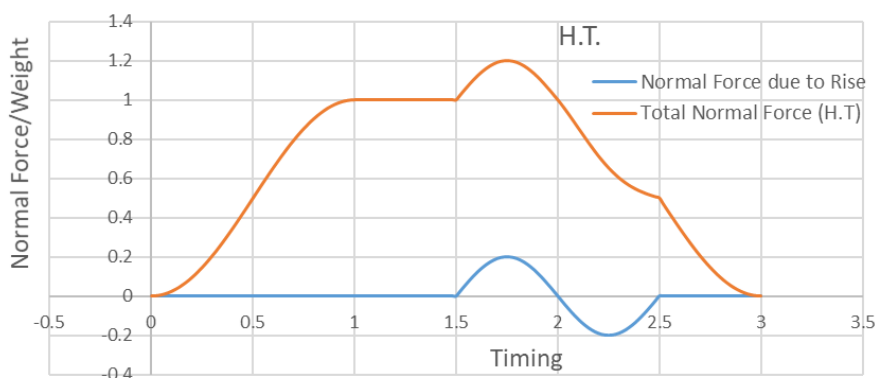
Shoe の接地時点を $t = t_0 = 0$ とし、Floor との間で若干すべり、静止した時点を $t = t_e$ とする。Shoe が Floor から離れる時点を $t = t_f$ とする。

まず、垂直力 $N(t)$ を考察する。垂直力はさきに述べたように両足接地の時は、身体重心の両足間への分配、および、重心の上下動に伴う慣性力に依る。足(靴)が接地してから静止まで ($0 \leq t \leq t_e$) は、上記全ての場合において単調に増加する。静止後、離れる (Take off) まで ($t_e \leq t \leq t_f$) は、重心の上下動 (Rise and Fall) がない

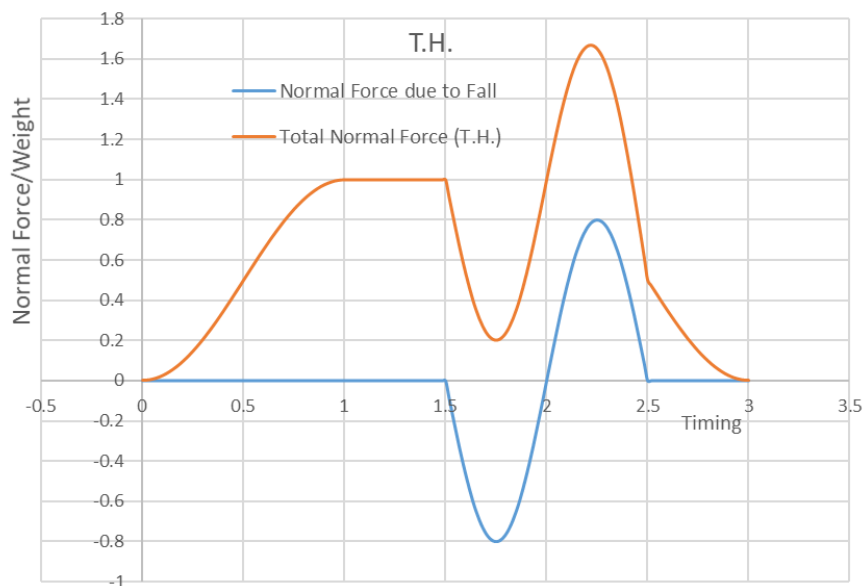
場合は、身体重心が Step 足の真上に来るまでは増加し、その後、Take off まで単調減少する。具体的には、上記 4.H. 2.T. の場合は一般的に上下の慣性力は小さい。図 2a にこのときの垂直力 $N(t)$ を例示する。重心の上下動がある場合 (1, 3 歩目) は、上下の加速度による慣性力が加わる。図 2b に 1. H.T. の場合の上下動による寄与分および合計の $N(t)$ 、また、図 2c には 3. T.H. の場合の上下動による寄与分および合計の $N(t)$ を模式的に示す。



a) Without rise and fall (Step 2 or 4 of Feather Step)



b) Step 1 of Feather Step



c) Step 3 of Feather Step

Fig.2. Normal Force to the Floor normalized by Body Weight vs. Count (Beat) for Each Footwork.

The unit time length depends on each step

一般的に Lower の過程は Rise の過程より短時間で行なわれるため、加速度に依る落差は大きい。垂直力 $N(t)$ は水平の摩擦力 $F(t)$ を得るために必要である。上図は Lower の過程で垂直力が不足する可能性があることを示唆している。

次に水平方向の力を考察する。摩擦力 $F(t)$ は、垂直力 $N(t)$ に対し摩擦係数 μ をかけたもので、摩擦係数 μ は相対速度 $v(t)$ の関数とする。

$$F(t) = \mu(v)N(t), \quad v(t) = \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

摩擦係数としては、静止摩擦係数 $\mu_s = \mu(v=0)$ および、動摩擦係数 $\mu_d = \mu(v \neq 0)$ とする。

以下に、すべりの過程を考察する。

$t = t_0 = 0$ においてスムーズに着地（軟着地）するとして $N(t_0) = 0$, $F(t_0) = 0$

足(靴)が着地してから静止まで ($0 \leq t \leq t_e$) は、単調に減速して静止する。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = H(t) - F(t) \leq 0, \quad F(t) = \mu N(t) \geq H(t) \geq 0$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = H(t) - \mu N(t) \leq 0 \quad (3)$$

静止後 $t \geq t_e$ では、(再すべりが無い場合)

$$F(t) = H(t) \quad (4)$$

となる。Shoe と Floor の間の相対運動はなく、従って水平力は静止摩擦である。上下動がなく、速度変化がほとんどない場合の着地から離地まで $0 \leq t \leq t_f$ の模式図を図 3 に示す。重心が接地点上を通過する付近で水平力の符号は変化する。重心に上下動がある場合、Footwork により符号の変化は大きく影響を受ける。

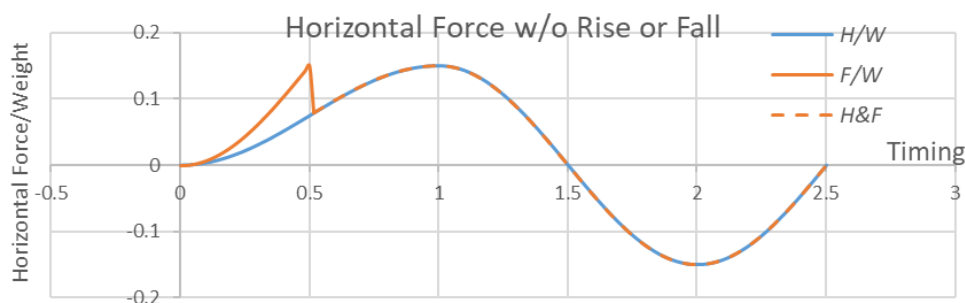


Fig.3. Schematic Normalized Horizontal Force vs. Count (Beat) in case of No Rise and Fall.

Dancer により与えられる水平方向の力 $H(t)$ を具体的に考察する。水平力は Dancer の意思で脚部や他の身体部分の筋肉などの力の総和として表されるものであるが、筆者は Dancer の意図する動きと実際の動きにずれが生じ、それが、踊り易い、踊りにくい、などに現れると考える。Dancer が意図する Shoe の水平位置を $x_B(t)$ 、接地しているとき対応する水平力を $H_B(t)$ として、実際の接地点 $x(t)$ のときは、 x_B からのずれに応じた復元力が生じる（生じさせる）ものとし、

$$H(t) = H_B(t) + k_h(x_B - x) \quad (5)$$

とモデル化する。式 (1) の運動方程式は具体的に

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H_B(t) + k_h \{x_B(t) - x\} - \mu(v)N(t) \quad (6)$$

となる。

2・2 滑りすぎ判定

踊りにくい Floor の条件を、簡単に分類すると、滑りにくい、と、滑りすぎに分けられる。この節では、滑りすぎの条件について考える。Shoe が floor に着地して滑走、減速して、静止までの過程を想定する。そうすると、初速から静止まで加速度が負のままを維持するのが、安定した足運びの条件となる。加速度が正の時期があれば、足が前方にとられ、いわゆる滑りすぎて踊りにくい状態となる。加速度が負の条件は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H - F < 0 \quad (7)$$

であるので

$$\mu(v) > \frac{H}{N} \quad (8)$$

が滑りすぎない条件となる。摩擦係数は、Shoe にかかる水平力と垂直力の比より大きい必要がある。水平力 H および、垂直力 N は Dancer の動作による。具体的には、足幅が広いと、開脚モーメント脚 M は引き締める方向（負）に必要となり、その値は摩擦係数が小さいほど大きくなる。（図 1）

水平力 H を具体的に考察する。足の接地角度を θ すなわち $\tan \theta = \frac{l}{h}$ とする。モーメントの釣り合い式は

$$M + Nl - \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} + F \right) h = 0 \quad (9)$$

となり、 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{Nl + M}{h} - F$ すなわち $H = \frac{Nl + M}{h} = N \tan \theta + \frac{M}{h}$

滑りすぎない条件 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = H - \mu N < 0$ は

$$\mu > \tan \theta + \frac{M}{Nh} \quad (10)$$

となる。すなわち、開脚角度 θ を大きく、また、開脚モーメント M を大きくすると、摩擦係数 μ は大きい必要がある。逆に言えば、滑りやすい Floor においては、歩幅を小さく、または、閉脚モーメントを使って Step する必要があるという常識が、このモデルでも説明できる。

2・3 滑りにくさの解析、定荷重モデルによる安定判別

この節では、滑りにくさの解析を微小範囲での滑りの安定性の判定解析で示す。先に述べたよう水平力 $H(t)$ および垂直力 $N(t)$ は変動するが、摩擦特性による安定すべりの条件を調べるため、まず、Dancer の意図する水平力 $H_B(t)$ および垂直力 $N(t)$ がほぼ一定とみなせる時点 $t = t_1$ を想定する。すなわち、

$$H_B(t_1) = H_0 = \text{const.} \quad N(t) = N(t_1) = \text{const.} \quad (11)$$

$t = t_1$ において $x = x_1$, $v = v_1$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu(v_1) N(t_1) - H_B(t_1) - k_h \{x_B(t_1) - x(t_1)\} = 0 \quad (12)$$

微小時間後 $t = t_1 + \Delta t$ のとき

$$x = x_1 + \Delta x = x_1 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_1} \Delta t = x_1 + v(t_1) \Delta t \quad (13)$$

運動方程式は整理し、さらに

$$t^* = \left(\frac{k_h}{m} \right)^{\frac{1}{2}} t, \quad 2\eta^* = \left(\left. \frac{d\mu}{dv} \right|_{v_1} \right) \left\{ \frac{N(t_1)}{k_h} \right\} \left(\frac{k_h}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

とにおいて無次元表示すると

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^{*2}} + 2\eta^* \frac{d\Delta x}{dt^*} + \Delta x = 0 \quad (15)$$

上式は、減衰振動の基本式であり、 $\eta^* < 0$ すなわち速度 v における摩擦係数の速度依存性 $\frac{d\mu}{dv}$ が負であれば、

その時点における微小変動は不安定に増幅する。 η^* で分類すれば、

$\eta^* \leq -1$: 単調増幅, 発散, $-1 \leq \eta^* \leq 0$: 振動解, 発散, $0 \leq \eta^* \leq 1$: 減衰振動, $\eta^* \geq 1$: 単調減衰

具体的には、固体摩擦の場合、一般的に動き始めの動摩擦係数 μ_d は静止摩擦係数 μ_s より小さいので、速度零付近で傾斜は負であると見做せる。滑りの途中で速度が零になる瞬間があると、この不安定現象が現れる。Dancer からは、いわゆる「つかかる」感覚の踊りにくさである。また、固体摩擦の場合、動摩擦係数の速度依存性が少ないので、いったん振動が発生すると、減衰しない現象も現れる。一方、流体摩擦の場合は、一般に摩擦係数の速度特性は正であるので、多少の振動は減衰が見込める。Shoe と Floor の間に液体等の潤滑剤を付することがよく行われているのは、この特性を利用しているからである。

2・4 滑りにくさの解析, 変動荷重解析

前節では、一定垂直荷重条件の下、微小線形範囲での定性的な効果を求めたが、ここでは、より実際に近い変動垂直荷重モデルでの非線形解析を行なう。Dancer の意図する着地から静止までの時間を $0 \leq t \leq t_e$ とし、この間の水平力 $H_B(t)$ および垂直力 $N(t)$ を時間の関数とする。垂直力 $N(t)$ は、(意図する) 静止に至るまで、時間に比例して増加するものとする。

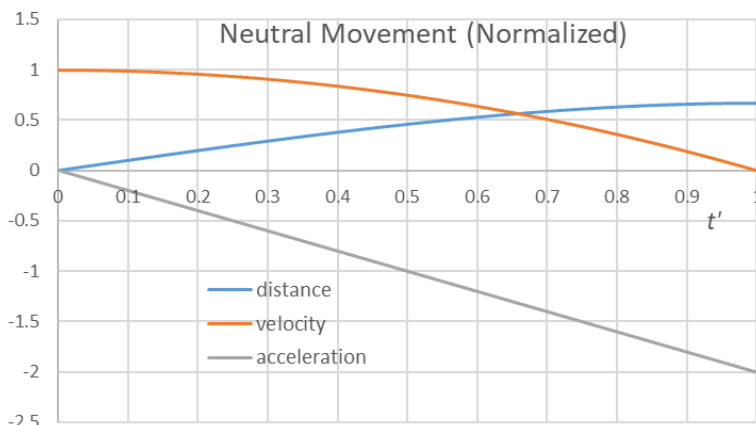
$$N(t) = \left(\frac{t}{t_e} \right) N_e \quad (17)$$

水平力に関しては摩擦力が一定の摩擦係数に比例すると Dancer は期待しているとする。実際の摩擦係数は $\mu(v)$ であるが Dancer は、着地時の摩擦係数 $\mu_c = \mu(v_0)$ で継続すると予測してその位置 x_B と実際の位置 x との差に応じた制御を行なうものとする。Dancer の予測通りの解 $x = x_B$ は

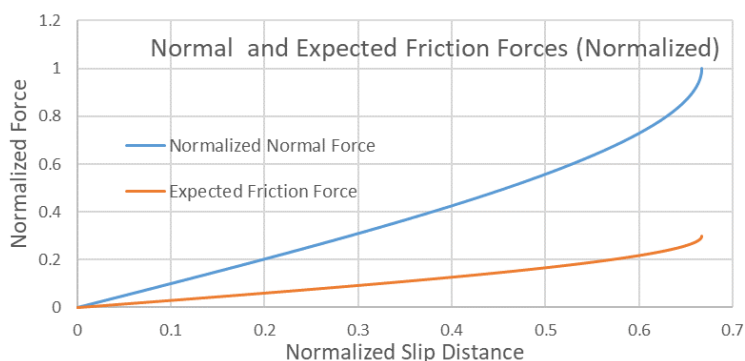
$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = H_B(t) - \mu_C N(t) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} = -2v_0 \left(\frac{t}{t_e} \right), \quad \frac{dx_B}{dt} = v_0 - v_0 \left(\frac{t^2}{t_e^2} \right), \quad x_B = v_0 t - \frac{v_0}{3t_e^2} t^3 \quad (19)$$

となる. この中心解を図4に示す.



a) Movement vs. Time



b) Forces vs. Distance

Fig.4. Neutral Solution for Neutral Movement with fixed Friction coefficient in case of no disturbance.

実際には, この解に微小擾乱が重畳し, 擾乱が増幅する場合は不安定となる. 対応する微分方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\mu_C N_e - 2 \frac{mv_0}{t_e} \right) \left(\frac{t}{t_e} \right) + k_h \left(v_0 t - \frac{v_0}{3t_e^2} t^3 - x \right) - \mu(v) \left(\frac{t}{t_e} \right) N_e \quad (20)$$

ここで $t' = \frac{t}{t_e}$, $x' = \frac{x}{v_0 t_e}$, $\frac{dx'}{dt'} \Big|_0 = 1$, $k_h' = \left(\frac{k_h t_e^2}{m} \right)$ とおいて無次元化し, さらに, $\frac{N_e t_e}{mv_0} = N_e'$

とおく. また, 摩擦係数の速度依存性を線形とし,

$$\mu(v) = \mu_{d0} + \eta v = \mu_{d0} + \eta \frac{dx}{dt} = \mu_{d0} + \eta' \frac{dx'}{dt'}, \quad \eta' = \text{const.} \quad (21)$$

初期摩擦係数は $\mu_C = \mu(v_0) = \mu_{d0} + \eta'$, 無次元の微分方程式は整理して,

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = -2t' + k_h' \left(t' - \frac{1}{3}t'^3 - x' \right) + \eta' N_e' \left(1 - \frac{dx'}{dt'} \right) t' \quad (22)$$

となる。解析のパラメータとしては、まず、前節で示された摩擦係数の速度依存パラメータ $\eta' = \eta v_0$ に注目す

る。まず、 $\eta' = 0$ の場合、すなわち、動摩擦係数に速度依存性がない場合は、 $k_h' = (2\pi f')^2$ として、

$$x' = t' - \frac{1}{3}t'^3 + x_0' \cos(2\pi f' t'), \quad \frac{dx'}{dt'} = 1 - t'^2 - 2\pi f' x_0' \sin(2\pi f' t') \quad (23)$$

前節の微小範囲の場合は減衰も発散もなかったが、変動荷重下の非線形解析においては、速度が遅くなってくると、速度が負になることがあり、静止摩擦に移行し不安定となる。(図5)

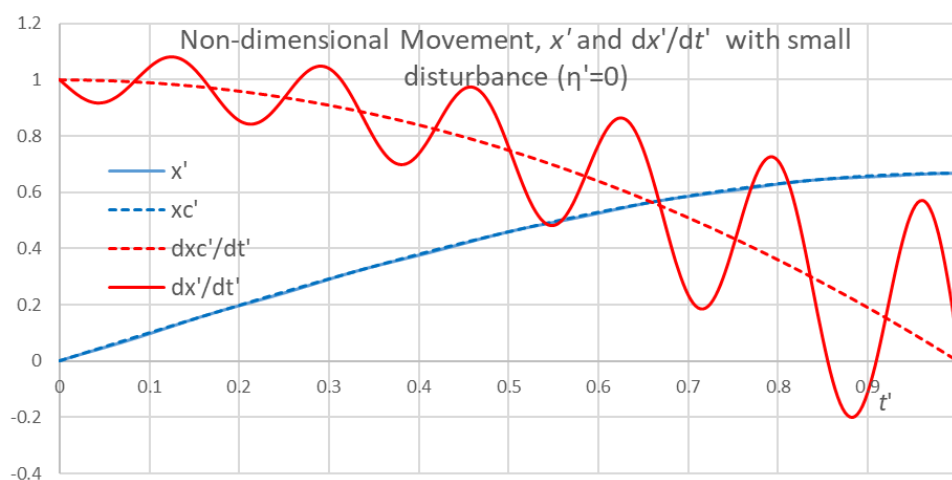


Fig.5. Foot Movement in case of Friction Coefficient without Velocity Effect. Normalized Displacement and Velocity vs. Normalized Time.

次に $\eta' = \eta v_0 \neq 0$ の場合を解析する。 $\eta'' = \eta' N_e'$, $k_h' = (2\pi f')^2$ においてパラメータを整理する。

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = -2t' + k_h' \left(t' - \frac{1}{3}t'^3 - x' \right) + \left(1 - \frac{dx'}{dt'} \right) \eta'' t' \quad (24)$$

初期値問題として $t' = 0$ から $\Delta t'$ ずつ増加させ、数値解析を行なう。初期値として、微小擾乱を $x' = x_0'$ で与える。図6に解析例を示す。

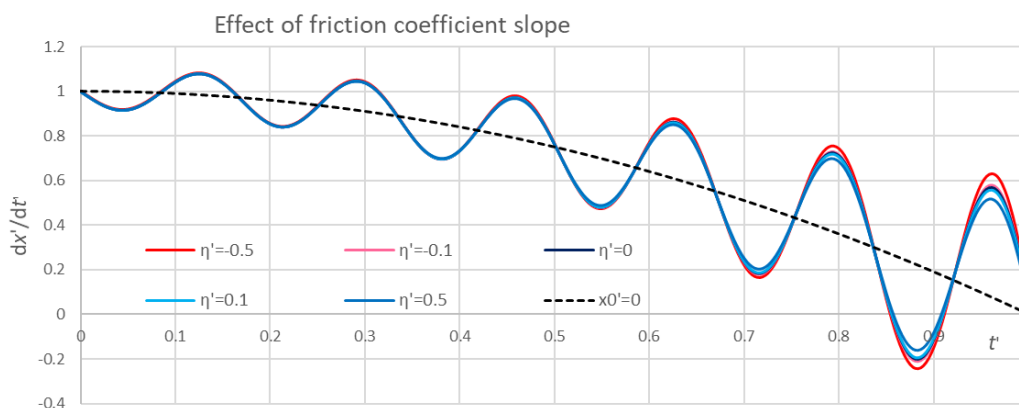


Fig.6. Effect of Friction Coefficient Velocity Effect. Normalized Foot Velocity vs. Normalized Time.

この図では前節の結果と異なり、摩擦係数の速度特性が負の場合だけでなく、正の場合においても、微小擾乱が成長することが示されている。これは、垂直力 $N(t)$ が増加する過程が原因と考えられる。

次に相当質量の動きの剛性（振動数）の影響を図7に示す。

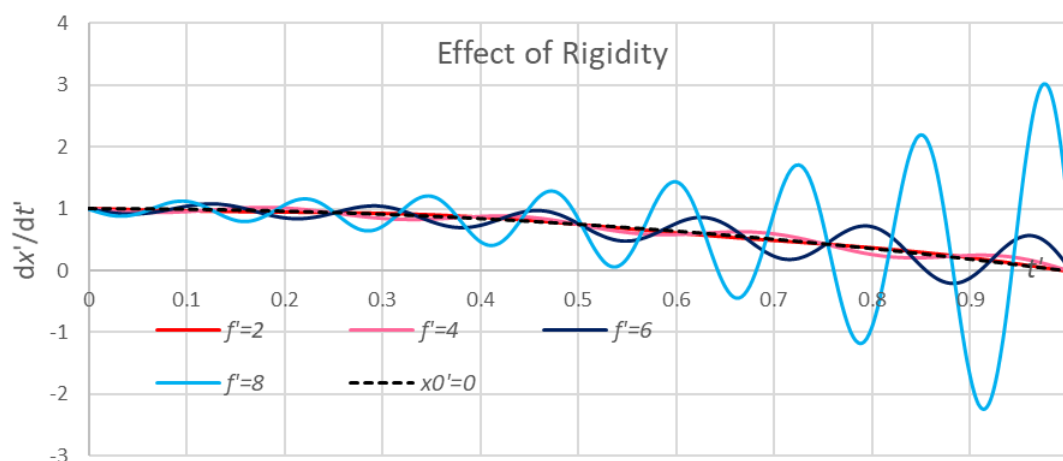


Fig.7. Effect of Rigidity (Frequency). Normalized Foot Velocity vs. Normalized Time.

この図は剛性が高いほど（振動数が高いほど）擾乱の成長が速いことを示している。

初期の擾乱の大きさの影響は、図8に示す。初期擾乱は、数値解析において着地位置の誤差で与えられるが、擾乱の大きさはその後の成長に大きな影響を与えることが示されている。

静止後、再すべりとなる過程については煩雑になるので本報にては省略する。

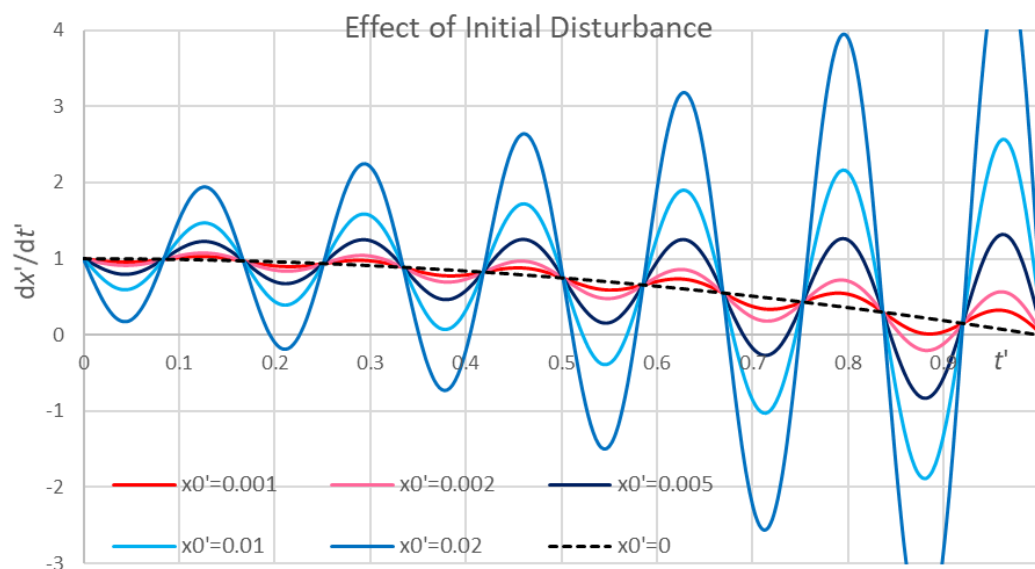


Fig.8. Effect of Initial Disturbance. Normalized Foot Velocity vs. Normalized Time.

3. 考 察

一般的に定荷重下で摩擦係数の速度特性の傾斜（粘性係数）が負のときは不安定となり、いわゆる自励振動を起し、逆に速度に対する傾斜が正のときは減衰に効くとされる。本報の定荷重モデルによる安定判別において

もこの原理が確認された, これは, 相対速度が零付近の静止摩擦と動摩擦の境界付近において垂直荷重があまり変化しない領域で特に有効と考えられる. 一方, 変動垂直荷重下における初期値問題としての非線形数値解析では, 新たに別の知見が示された. Ballroom dancing における足の着地動作のように垂直力が大きく増加する過程においては, 摩擦係数の速度に対する傾斜が正であっても, 不安定になり, その不安定性は, 摩擦の相対速度が減じ静止点付近に近づくほど, 増大することが示された. Parameter 解析により, 不安定性の振幅は, 着地点の誤差として与えられる初期 Disturbance の誤差の効きが大きいこと, また, この不安定振動は Frequency が高いほど増幅が大きいことも示された. Frequency は Foot-Shoe 部の等価質量と, この部分の相対移動に対する剛性の比によるので, 具体的には脚, 足各関節部の筋肉を柔らかく用いた方が不安定性は少ないことを示唆していると考えられる.

図 5-8 は, 式 (20) の微分方程式の数値解をグラフに表したものであり, 振幅が大きくなった場合の(無次元)速度が負になる部分まで示されている. 実際には, 速度が零になった時点で静止摩擦となり, 式 (20) は以降は成立しない. 静止後は場合により, 再すべりや逆方向すべりなどより複雑な仕組みへ移行するが, 今回は煩雑さを避けるため, 微分方程式の解をそのまま表示してある.

摩擦は一般に速度依存性の少ないとされる固体摩擦と速度依存性のあるとされる流体摩擦に分類される.

Dancer がしばしば油や水などを Floor や靴底に付けるのは, 流体付着に依る(正の)速度依存性を利用して自励振動を防いでいると思われがちであったが, 本報の解析により, 速度依存性の効きはむしろ少ないことが示された. 流体を付する利点は, 静止摩擦係数と動摩擦係数の差を減じることにあると思われる.

4. 結 語

ボールルームダンスの踊りやすさの重要な要素である Shoe と Floor の滑りの力学的モデルを構築し, 解析を行った. 解析において, 滑りすぎ解析, 滑りの安定解析, および, 着地から静止までの滑り過程を Parameter を変えた条件のもとでの解析を行ない, 踊りやすい Shoe-Floor 関係の条件を論じた.

文 献

- (1) ISTD (The Imperial Society of Teachers of Dancing), "The ballroom technique", 1st edition (1944), 10th edition (1982), pp. 1-134.
- (2) SHIOYA, T., "Analysis of Swing Movement in Ballroom Dancing", The International Sports Engineering Association Conference, ISEA 2018, Brisbane, Australia, 26 to 29 March 2018, MDPI-Proceedings Volume 2, ISEA 2018a, 2 (6), 224.
- (3) SHIOYA, T., "Analysis of Sway in Ballroom Dancing", The International Sports Engineering Association Conference, ISEA 2018, Brisbane, Brisbane, Australia, 26 to 29 March 2018, MDPI-Proceedings Volume 2, ISEA 2018b, 2 (6), 223
- (4) 塩谷義, "ボールルームダンスにおける身体の上下運動の解析", 日本機械学会講演論文集 SHD No.16-40 (2016), C9.
- (5) 塩谷義, "ボールルームダンスおよびその他のスポーツにおける身体のスウェイの解析", 日本機械学会講演論文集 SHD No.17-43 (2017), D1.
- (6) 塩谷義, "ボールルームダンスにおける左回転と右回転の比較の解析", 日本機械学会講演論文集 SHD No.18-15 (2018), C21.
- (7) 塩谷義, "ボールルームダンスにおけるピボットターンおよび関連動作の解析", 日本機械学会講演論文集 SHD No.19-306 (2019), C2.